TSP - TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Abbiamo un grafo $G=(V,A)$, $V=\{1,\dots,n\}$ è l'insieme delle n città da visitare.

Gli archi A sono le strade che collegano coppie di città.

Sia c_{ij} il costo per andare dalla città i alla città j.

Vogliamo visitare ciascuna città una sola volta e tornare al punto di partenza, e tutto al minor costo possibile.

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{se vado da } i \text{ a } j\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$ minimizzo costo totale

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,n$$ voglio esattamente un arco uscente(+) da i (ho tutti quelli disponibili ne scelgo uno solo)

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(j)} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,n$$ voglio esattamente un arco entrante (-) in j

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij}\le |S|-1 \qquad \forall S\subset V,\ 2\le|S|\le n-2$$

insieme dei vincoli di eliminazione sottocircuito (SEC, subtour elimination constraints)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

es-1) Un'azienda di trasporto deve caricare m camion $\{1,\dots,m\}$ in modo da servire giornalmente un insieme di clienti.
m camion possono essere caricati n pallet $\{1,\dots,n\}$, il j-esimo dei quali ha un peso w_j ed un profitto p_j.

Per il i-esimo camion il CF utilizzatore è c_i e la capacità in peso b_i.

Si vogliono caricare alcuni dei pallet sui camion in modo da massimizzare la somma dei profitti dei pallet caricati meno la somma dei costi dei camion utilizzati.

a) Determinare modello ILP di tipo "descrittivo" in cui vi sono tra le altre, variabili binarie che dicono se un certo pallet è caricato su un certo camion

m camion = costo c_i, capacità b_i $\quad i \in \{1,\dots,m\}$

n pallet = peso w_j, profitto p_j $\quad j \in \{1,\dots,n\}$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se camion } i \text{ è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall i = 1,\dots,m$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se pallet } j \text{ è caricato su camion } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall i = 1,\dots,m \quad \forall j = 1,\dots,n$$

$$\max \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij} \right) - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

(1) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \qquad j = 1,\dots,n$ $\Rightarrow$ dice che un pallet può essere caricato al max una volta sul camion

(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le b_i y_i \qquad i = 1,\dots,m$

$$x_{ij} \in \{0,1\}^{m \times n}, \quad y_i \in \{0,1\}^{m}$$

Assomiglia al BIN PACKING PROBLEM (BPP), solo che nel BPP devo caricare tutti gli oggetti, qui posso scegliere

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

b) Determinare un algoritmo euristico guidato dal rilassamento continuo del punto a)

- 1 P uguale al modello di sopra
- 2. Risolvi il RC di P, ottieni (x_{ij}^*, y_i^*)
- 3 Se (x_{ij}^*, y_i^*) sono interi ⇒ STOP
- 4 Se y_i^* è frazionario, aggiungi a P il vincolo =

$y_i = 1 \quad \forall i : y_i^* = 1$ e per y_i^* frazionario di valore max

Altrimenti, se y_i^* è intero ma x_{ij}^* no, aggiungi al vincolo =

$x_{ij} = 1 \quad \forall (i,j) : x_{ij}^* = 1$

poi considera x_{ij}^* di valore frazionario max e fissalo a $\begin{cases} 1 \text{ se (2) è soddisfatto} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

c) Si determini un modello ILP con una variabile associata ad ogni possibile caricamento di pallet in ogni camion

MODELLO DI TIPO "SET COVERING"

$\mathcal{C}_i$ = collezione dei sottoinsiemi di pallet che possono essere caricati sul camion i.

$$\mathcal{C}_i = \left\{ S \subseteq \{1, \dots, m\} : \sum_{j \in S} w_j \le b_i \right\} \quad i = 1, \dots, m$$

(S = schema di caricamento)

Il peso di ogni $S \in \mathcal{C}_i$ è =

$$(p_{S,i}) = \sum_{j \in S} p_j - c_i$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Definisco $x_{S,i} = \begin{cases} 1 \text{ se il camion } i \text{ è caricato con tutti e soli i pallet di } S \\ 0 \text{ altrim.} \end{cases}$

$$\max \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{S \in \mathcal{C}_i} p_{S,i} \cdot x_{S,i} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\substack{S \in \mathcal{C}_i \\ j \in S}} x_{S,i} \right) \le 1 \quad (Y_j)$$

(perché dice "ALCUNI DEI PALLET" quindi non tutti devono essere assegnati esattamente ad 1 camion)

$j = 1, \dots, m$

ogni pallet caricato al più una volta

$$\sum_{S \in \mathcal{C}_i} x_{S,i} \le 1 \quad (z_i)$$

$i = 1, \dots, m$

Ad ogni camion posso assegnare al massimo una delle configurazioni possibili perché voglio mandarne al più 1 camion

$x_{S,i} \in \{0,1\} \quad \forall S \in \mathcal{C}_i$

d) Per il modello al punto c), si definisca un modello IP per il problema della generazione di colonne per la variabile associata al generico comune i.

Costruzione duale del modello al punto c)

$$\max \sum_{j=1}^{n} Y_j + \sum_{i=1}^{m} Z_i$$

$$\sum_{j \in S} Y_j + Z_i \geq P_{S,i} \qquad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall S \in \mathcal{C}_i$$

$$Y_j, Z_i \geq 0$$

Dati (Y^*, Z^*), $\exists$ comune i e un sottoinsieme $S \in \mathcal{C}_i$ |

1) $\sum_{j \in S_i} Y_j^* + Z_i^* < P_{S,i}$? *

$$h_j = \begin{cases} 1 & \text{se pallet } j \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

— la corrispondente proferma di generazione (separazione variabili duale) è:

$$\max \sum_{j=1}^{n} (P_j - Y_j^*) h_j$$

$$\Rightarrow KP-01$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j h_j \leq b_i \qquad i \text{ fissato}$$

$$h_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

e) Si discutano le semplificazioni che si ottengono se due punti precedenti ipotizzano i costi e la capacità di tutti i camion fossero uguali

$$\begin{cases} c_i = c & \forall i = 1, \dots, m \\ b_i = b & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

indipendentemente dal camion

$\mathcal{C}_i$ = collezione dei sottoinsiemi di pallet corrispondente ad uno schema di caricamento valido, ovvero =

$$\mathcal{C}_i = \left\{ S \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{j \in S} W_j \leq b \right\}$$

e $P_{S,i} = \sum_{j \in S} P_j - c$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Il modello del punto c) diventa:

$$\max \sum_{S \in \mathcal{C}} x_S P_S$$

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{C} \\ j \in S}} x_S \leq 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{S \in \mathcal{C}} x_S \leq m \qquad \Rightarrow \text{gli schemi di caricamento da scegliere devono essere} < m$$